

图像方向纹理保持的方向全变差正则化去噪模型及其主优化算法

刘鹏飞¹, 肖 亮^{1,2}, 黄丽丽³

(1. 南京理工大学计算机科学与工程学院, 江苏南京 210094; 2. 江苏省光谱成像与智能感知重点实验室, 江苏南京 210094; 3. 广西科技大学理学院, 广西柳州 545006)

摘 要: 正则化方法是目前解决图像去噪不稳定性的一条有效途径, 但对于图像中纹理细节的保持仍是棘手的问题. 本文针对图像方向纹理保持的去噪问题, 给出了图像方向纹理保持的方向全变差正则化去噪模型. 分析和证明了方向全变差的若干等价表示性质, 并基于该性质迭代构造代理泛函和 B 样条离散差分逼近方法, 给出了一种主优化去噪算法. 数值实验表明, 该方法在去除噪声、抑制图像的“阶梯效应”和保持图像方向纹理等方面取得较好的效果.

关键词: 方向全变差; 纹理保持; 图像去噪; B 样条; 阶梯效应

中图分类号: TP317. 4

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2014)11-2205-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.11.012

Directional Texture Preserving Total Variation Regularization Based Image Denoising and Majorization Minimization Algorithm

LIU Peng-fei¹, XIAO Liang^{1,2}, HUANG Li-li³

(1. School of Computer Science and Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. Jiangsu Key Lab of Spectral Imaging and Intelligent Sensing Nanjing, Jiangsu 210094, China;

3. School of Science, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou, Guangxi 545006, China)

Abstract: The regularization method has recently been an efficient approach to make the process of image denoising well-posed, while preserving image textures and details become more intractable. This paper focused on directional texture preserving image denoising problem gives a directional texture preserving total variation regularization based model. Furthermore, we analyze and demonstrate some equivalent properties of the directional total variation, and give the majorization minimization algorithm based on iteratively constructing surrogate functionals and B-spline difference filters. Numerical experiments show that the new method can achieve better result in removing the noise, restraining staircase effect and preserving directional texture.

Key words: directional total variation; texture preserving; image denoising; B-spline; staircase effect

1 引言

图像去噪是图像处理中信号恢复的基础问题. 图像去噪要求在降低或消除观测图像噪声的同时, 尽可能地保持图像的纹理、角点、边缘和细节特征, 以便后续的图像分析和模式识别. 数学上, 图像去噪属于不适定反问题^[1], 解决不适定性的有效途径是在图像处理中引入关于图像的先验信息, 将图像去噪转换成适定问题. 因此, 正则化方法是图像去噪的一条有效途径. 考虑一幅实值图像 $f(x, y): \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$, 其中 $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^2$ 是图像的定义域. 对于含加性噪声的观测图像, 降质模型可以表示为:

$$g(x, y) = f(x, y) + n(x, y) \quad (1)$$

其中, $n(x, y)$ 是假设均值为 0 且方差为 σ^2 的服从高斯分布的加性噪声. 基于变分正则化方法的图像去噪模型可表示为:

$$\hat{f} = \arg \min_f \int_{\Omega} |f - g|^2 dx dy + \lambda J(f) \quad (2)$$

其中, $\int_{\Omega} |f - g|^2 dx dy$ 称为数据保真项, 主要用于度量去噪图像 f 和观测图像 g 的接近程度; $J(f)$ 称为正则化项, 保证去噪图像 f 的正则性; $\lambda \geq 0$ 为保真项和正则化项之间的权衡参数.

正则化项选取是图像去噪中的关键技术,直接影响去噪图像的质量.近年来,利用变分正则化方法研究图像恢复问题得到了许多重要模型和方法.1977年,Tikhonov 等人提出了一类在 $L_2(\Omega)$ 空间中约束图像光滑性的 Tikhonov 正则化模型^[1],该模型所得到的解常常过平滑.对于图像均匀区域来说,能够很好地去除噪声,但磨光了边缘等重要特征,图像中的纹理细节丢失严重.为了在去除噪声的同时能够有效地保持图像边缘,Rudin, Osher 和 Fatemi 首次在图像去噪中使用全变差(Total Variation, TV)正则化项^[2].由于 TV 正则化项具有良好的保持边缘特性,TV 正则化方法广泛应用于图像恢复^[3-7]、图像修补^[8]、图像放大^[9]等图像处理任务.然而,由于 TV 正则化方法所求的解是分段常数的,仍然存在“阶梯效应”和纹理保持不好的问题.为了减少和抑制“阶梯效应”以及增强纹理保持效果,研究者们提出基于图像高阶导数的高阶正则化方法.2011年,Hu Yue 等基于 TV 可重新解释为图像一阶方向导数的 $L_1 - L_2$ 和 $L_1 - L_1$ 混合范数,将 TV 进行了推广,提出了 n 阶各向同性和各向异性 TV 正则化项(称为高阶 TV)^[10].数值实验表明,二阶 TV 比一阶 TV 具有更好的去噪效果,并能有效地抑制阶梯效应和振铃效应.2012年,İlker Bayram 和 Mustafa E. Kamasak 首次提出了方向全变差(Directional Total Variation, DTV)模型^[11],为图像方向纹理的保持提出了一种新的方法,但欠缺充分的理论分析,并且由于基于传统有限差分的离散形式不是旋转不变的,不利于方向纹理的保持.

本文在 İlker Bayram 和 Mustafa E. Kamasak 的研究基础上展开工作,针对图像方向纹理的去噪问题,首先通过等价表示分析了经典图像各向同性全变差模型不利于方向纹理保持的缺点,在此基础上,引出了方向全变差模型.分析了 DTV 正则化项的若干等价表示性质,揭示了新模型的方向纹理表征机理.基于 B 样条离散差分形式的旋转不变性^[12],使用 B 样条离散差分逼近的方法近似图像的偏导数,代替了常用的向前差分或向后差分法,并在此基础上给出了图像方向纹理保持的 DTV 正则化去噪模型.基于 DTV 等价表示性质迭代构造代理泛函,给出了一种主优化(Majorization Minimization, MM)算法.数值实验表明,与 TV 去噪算法和 DTV 去噪算法^[11]相比,本文方法能更好地去除噪声、保持图像方向纹理和抑制图像的阶梯效应.

2 方向全变差(DTV)模型及其等价表示

2.1 图像各向同性全变差的等价表示及问题分析

对于一幅大小为 $M \times N$ 的离散图像 $f(i, j)$,其中 $i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$.为方便起见,我们引入以下记号,用 X 表示 $M \times N$ 维欧氏空间 $\mathfrak{R}^{M \times N}$, $Y = X \times X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$

和 $\| \cdot \|_2$ 分别表示欧氏空间 \mathfrak{R}^2 上的内积和欧氏范数.定义离散的梯度算子 $\nabla: X \rightarrow Y$,及其共轭算子 $\nabla^T: Y \rightarrow X$,图像 f 的梯度表示为 $\nabla f = [\nabla f(i, j)] \in Y$,其中 $\nabla f(i, j) = (\Delta_{1,0}f(i, j), \Delta_{0,1}f(i, j))^T$, $\Delta_{1,0}$ 和 $\Delta_{0,1}$ 分别表示水平和垂直方向的偏导数算子.

图像 f 在任意一点 $(i, j) \in \Omega$ 处沿着单位向量 $u_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ 的方向导数和 f 的各向同性全变差分别定义为:

$$f_\varphi(i, j) = \Delta_{1,0}f(i, j)\cos\varphi + \Delta_{0,1}f(i, j)\sin\varphi = \langle \nabla f(i, j), u_\varphi \rangle \quad (3)$$

$$\text{TV}(f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\nabla f(i, j)\|_2 \quad (4)$$

定义 1 对于任意的 $p \in X, q \in X, u = (u^1, u^2) \in Y, v = (v^1, v^2) \in Y$,定义 X 和 Y 上的内积: $\langle p, q \rangle_X = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N p_i q_{i,j}, \langle u, v \rangle_Y = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (u_i^1 v_{i,j}^1 + u_i^2 v_{i,j}^2)$.

特别地,记 $\langle p, p \rangle_X = \|p\|_X^2, \langle u, u \rangle_Y = \|u\|_Y^2$.

设 $z = [z(i, j)] \in Y$,其中 $z(i, j) = (z_1(i, j), z_2(i, j))^T, i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$.用 B 表示单位圆内的所有向量构成的集合,即 $B = \{w \in \mathfrak{R}^2 | \|w\|_2 \leq 1\}$ (见图 1).记集合 $Q = \{z \in Y | z(i, j) = (z_1(i, j), z_2(i, j))^T \in B\}$.

基于 $u_\varphi \in B$ 和式(3)中图像方向导数的定义,可证明图像 f 的各向同性全变差可利用方向导数进行等价表示.

$$\text{性质 1} \quad \text{TV}(f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sup_{w \in B} \langle \nabla f(i, j), w \rangle.$$

证明 基于 $w \in B$,令 $w = (\|w\|_2 \cos \varphi, \|w\|_2 \sin \varphi)^T$,由式(3)知,在 f 点 $(i, j) \in \Omega$ 沿着向量 w 的方向导数为:

$$\langle \nabla f(i, j), w \rangle = \|\nabla f(i, j)\|_2 \|w\|_2 \cos(\varphi - \vartheta) \quad (5)$$

其中, ϑ 表示梯度 $\nabla f(i, j)$ 的方向.则当 $\varphi = \vartheta$ 且 $\|w\|_2 = 1$ 时,式(5)取得最大值,即 $\sup_{w \in B} \langle \nabla f(i, j), w \rangle = \|\nabla f(i, j)\|_2$,从而性质 1 得证.

由性质 1 可知,基于图像各向同性全变差的旋转不变性,即经任意旋转变换后,图像各向同性全变差的值都相等,进而,我们找不到一个特定方向使图像的各向同性全变差取得最小值.因此,各向同性全变差并不能够体现图像中纹理的主方向性,不利于图像中方向纹理的保持.

2.2 方向全变差(DTV)的导出及其等价表示

为了保持图像中的方向纹理和边缘,İlker Bayram 和 Mustafa E. Kamasak 在各向同性 TV 的基础上,使用 $E_{\alpha, \theta}$ 代替了 B ,提出了 DTV 正则化项^[11],定义为:

$$\text{TV}_{(\alpha, \theta)}(f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sup_{w \in E_{\alpha, \theta}} \langle \nabla f(i, j), w \rangle \quad (6)$$

其中, $\alpha > 1, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $E_{\alpha, \theta}$ 表示长轴为 α 个单位长度、短轴为 1 个单位长度、倾斜角为 θ 的椭圆所围成的区域(见图 1)。

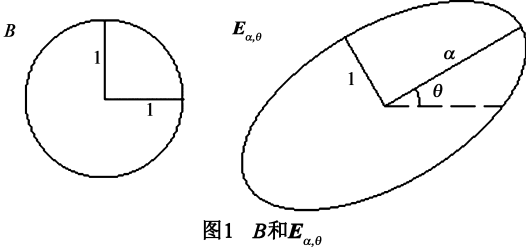


图1 B和 $E_{\alpha, \theta}$

如图 1, 我们可以看出 $E_{\alpha, \theta}$ 是由 B 经过拉伸和旋转变换得到的, 则 $E_{\alpha, \theta}$ 与 B 之间的关系可以表示为:

$$E_{\alpha, \theta} = R_{\theta} \Lambda_{\alpha} B \quad (7)$$

$$\text{其中, } R_{\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \Lambda_{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

定义算子 $\mathfrak{R}_{\theta}: Y \rightarrow Y$ 和 $\Pi_{\alpha}: Y \rightarrow Y$, 作用于 $z \in Y$ 有如下形式:

$$(\mathfrak{R}_{\theta} z)(i, j) = R_{\theta}(z(i, j)), (\Pi_{\alpha} z)(i, j) = \Lambda_{\alpha}(z(i, j)), \text{ 则可验证共轭算子 } \mathfrak{R}_{\theta}^T \text{ 和 } \Pi_{\alpha}^T \text{ 具有如下性质: } \mathfrak{R}_{\theta}^T = \mathfrak{R}_{-\theta}, \Pi_{\alpha}^T = \Pi_{\alpha}.$$

因此, 根据定义 1 以及算子 \mathfrak{R}_{θ}^T 和 Π_{α}^T 的性质, 式(6)中的图像方向全变差 $\text{TV}_{\alpha, \theta}(f)$ 可以等价表示为:

$$\text{TV}_{\alpha, \theta}(f) = \sup_{z \in Y} \langle f, \nabla^T \mathfrak{R}_{\theta} \Pi_{\alpha} z \rangle_X \quad (8)$$

$$\text{性质 2 } \text{TV}_{\alpha, \theta}(f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\Lambda_{\alpha} R_{-\theta} \nabla f(i, j)\|_2.$$

证明 根据算子 \mathfrak{R}_{θ}^T 和 Π_{α}^T 的性质以及式(7), 从而,

$$\begin{aligned} \text{TV}_{\alpha, \theta}(f) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sup_{w \in E_{\alpha, \theta}} \langle \nabla f(i, j), w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sup_{w \in B} \langle \nabla f(i, j), R_{\theta} \Lambda_{\alpha} w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sup_{w \in B} \langle \Lambda_{\alpha} R_{-\theta} \nabla f(i, j), w \rangle \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\Lambda_{\alpha} R_{-\theta} \nabla f(i, j)\|_2. \end{aligned}$$

由性质 2 可知, 基于该等价表示性质计算图像的方向全变差, 便于我们寻找出使得图像方向全变差取得最小值的 θ , 进而, 确定图像中纹理的主方向。

3 基于 B 样条差分逼近偏导数方法

本质上, TV 和高阶 TV 正则化项都是基于连续图像的偏导数及其积分定义的^[2, 10]. 在数值实验时, 经常使用有限差分方法来近似偏导数. 例如, 文献[11]使用

向后差分法近似图像的偏导数, 即图像 $f(i, j)$ 沿着水平方向和垂直方向的偏导数分别近似为:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0} f(i, j) &= f(i, j) - f(i-1, j); \\ \Delta_{0,1} f(i, j) &= f(i, j) - f(i, j-1) \end{aligned} \quad (9)$$

然而, 这种离散形式不是旋转不变的, 不利于图像中方向纹理的保持. 基于 B 样条差分形式的旋转不变性, 本文使用 B 样条离散差分逼近偏导数方法, 代替常用的向前差分或向后差分法, 即

$$\Delta_{m,n}^B f[i, j] = \underbrace{[\beta_m^d(i+\delta) \otimes \beta_n^d(j+\delta)]}_{\beta_{m,n}^d(i,j)} * f[i, j] \quad (10)$$

其中, \otimes 表示 Kronecker 积, $*$ 表示卷积, $d = m + n$, $\beta_n^d(x)$ 表示 d 次 B 样条函数的 n 阶偏导数, δ 的选择如下:

$$\delta = \begin{cases} \frac{1}{2}, & d \text{ 为奇数} \\ 0, & d \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (11)$$

因此, 根据性质 2, B 样条差分逼近的 DTV 正则化项(称 DTV_B 正则化项)为:

$$\text{TVB}_{\alpha, \theta}(f) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \|\Lambda_{\alpha} R_{-\theta} \nabla f(i, j)\|_2 \quad (12)$$

其中 $\nabla f(i, j) = (\Delta_{1,0}^B f(i, j), \Delta_{0,1}^B f(i, j))^T$.

对于 wood 纹理图像 2(如图 3(b)), 使用向后差分法和 B 样条离散差分逼近的图像方向全变差分别记为 $\text{TV}_{\alpha, \theta}$ 与 $\text{TVB}_{\alpha, \theta}$. 当 $\alpha = 5$ 时, 图像的方向全变差 $\text{TV}_{5, \theta}$ 与 $\text{TVB}_{5, \theta}$ 与 θ 的关系如图 2 所示. $\text{TV}_{5, \theta}$ 与 $\text{TVB}_{5, \theta}$ 都在 $\theta = \pi/6$ 处取得最小值, 与 wood 图像 2 中纹理的主方向一致. 但 $\text{TV}_{5, \pi/6}$ 的值远大于 $\text{TVB}_{5, \pi/6}$, 基于最小化图像方向全变差的问题, $\text{TVB}_{5, \pi/6}$ 越小越有利于保持 wood 图像 2 中的主方向纹理. 因此, 本文 B 样条差分逼近的 DTV_B 正则化项更有利于图像中方向纹理的保持。

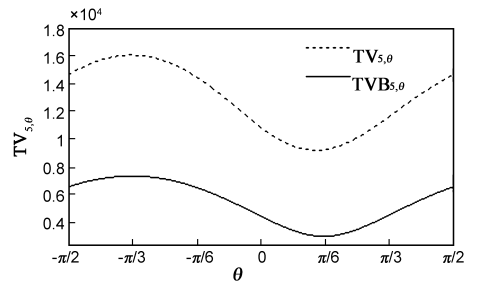


图2 wood纹理图像2的方向全变差 $\text{TV}_{5, \theta}$ 和 $\text{TVB}_{5, \theta}$ 与方向参数 θ 之间的关系图

4 基于方向全变差的去噪模型及其算法

本文针对方向纹理图像去噪问题, 使用 DTV_B 正则化项, 建立如下 DTV_B 去噪模型:

$$\hat{f} = \arg \min_f \frac{1}{2} \|g - f\|_X^2 + \lambda \text{TVB}_{\alpha, \theta}(f) \quad (13)$$

根据式(8),模型式(13)可进一步表示为:

$$\hat{f} = \arg \min_f \frac{1}{2} \|g - f\|_X^2 + \lambda \sup_{z \in Q} \langle f, \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z \rangle_X \quad (14)$$

令 $L(f, z) = \frac{1}{2} \|g - f\|_X^2 + \lambda \langle f, \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z \rangle_X$, 由于 $L(f, z)$ 关于 f 严格凸, 关于 z 严格凹, 因此, 模型式(14)等价于寻找鞍点 (\hat{f}, \hat{z}) 求解如下极小极大化问题:

$$\min_f \max_{z \in Q} L(f, z) = L(\hat{f}, \hat{z}) = \max_{z \in Q} \min_f L(f, z) \quad (15)$$

由于 $L(f, z)$ 可以进一步表示为:

$$\begin{aligned} L(f, z) &= \frac{1}{2} \|g - f\|_X^2 + \lambda \langle f, \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z \rangle_X \\ &= \frac{1}{2} \|f - (g - \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z)\|_X^2 + \frac{1}{2} \|g\|_X^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \|g - \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z\|_X^2 \end{aligned} \quad (16)$$

联合式(14)、(15)、(16), 因此, $\hat{f} = g - \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha \hat{z}$, 其中,

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \arg \max_{z \in Q} -\frac{1}{2} \|g - \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z\|_X^2 \\ &= \arg \min_{z \in Q} \|g - \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha z\|_X^2 \end{aligned} \quad (17)$$

建立如下目标函数: $C(z) = \|g - Az\|_X^2$, 其中 $A = \lambda \nabla^T \mathfrak{R}_\theta \Pi_\alpha$. 基于最小化目标函数 $C(z)$, 本文使用 MM 算法^[10,13], 在 MM 算法的框架中, 根据 MM 算法的迭代思想, 第 k 次迭代时的 MM 算法主要包括以下两个步骤:

(1) 在第 k 次迭代值 z^k 处构造一个代理泛函 $R(z, z^k)$, 其中 $R(z, z^k)$ 满足如下性质:

$$C(z) \leq R(z, z^k), \forall z \in Q; R(z^k, z^k) = C(z^k) \quad (18)$$

(2) 通过最小化 $R(z, z^k)$ 产生下一次迭代值 z^{k+1} , 即 $z^{k+1} = \arg \min_{z \in Q} R(z, z^k)$.

根据代理泛函 $R(z, z^k)$ 的性质(18), 迭代最小化 $R(z, z^k)$ 求得的一系列解 $\{z^k\}$ 收敛到模型式(17)的解 \hat{z} , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} z^k = \hat{z}$.

因为, $C(z)$ 在点 $z^k \in Q$ 处的二阶泰勒展开式为:

$$\begin{aligned} C(z) &= C(z^k) + 2\langle z - z^k, A^T(Az^k - g) \rangle_Y \\ &\quad + \langle z - z^k, A^T A(z - z^k) \rangle_Y \end{aligned} \quad (19)$$

假设存在常数 $\tau \in \mathfrak{R}$, 使得 $\tau I - \nabla \nabla^T$ 是半正定的, 则 $\alpha^2 \tau \lambda^2 I - A^T A$ 也是半正定的. 所以,

$$\begin{aligned} C(z) &= C(z^k) + 2\langle z - z^k, A^T(Az^k - g) \rangle_Y + \langle z - z^k, A^T A(z - z^k) \rangle_Y \\ &\leq C(z^k) + 2\langle z - z^k, A^T(Az^k - g) \rangle_Y + \alpha^2 \tau \lambda^2 \langle z - z^k, z - z^k \rangle_Y \\ &= C(z^k) - \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} \langle A^T(g - Az^k), A^T(g - Az^k) \rangle_Y \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} \langle A^T(g - Az^k), A^T(g - Az^k) \rangle_Y \\ &\quad + 2\langle z - z^k, A^T(Az^k - g) \rangle_Y + \alpha^2 \tau \lambda^2 \langle z - z^k, z - z^k \rangle_Y \\ &= \alpha^2 \tau \lambda^2 \|z - [z^k + \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} A^T(g - Az^k)]\|_Y^2 + K \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{R(z, z^k)} \end{aligned}$$

其中, $K = C(z^k) - \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} \langle A^T(g - Az^k), A^T(g - Az^k) \rangle_Y$ 是与 z 无关的常数.

因此,

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \arg \min_{z \in Q} R(z, z^k) \\ &= \arg \min_{z \in Q} \alpha^2 \tau \lambda^2 \|z - [z^k + \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} A^T(g - Az^k)]\|_Y^2 \\ &= z^k + \frac{1}{\alpha^2 \tau \lambda^2} A^T(g - Az^k) \end{aligned} \quad (20)$$

由 $\{z^k\}$ 收敛到模型式(17)的解 \hat{z} , 即得

$$\begin{aligned} \hat{z}(i, j) &= \frac{z^{k+1}(i, j)}{\max\{\|z^{k+1}(i, j)\|_2, 1\}}, \quad (21) \\ i &= 1, \dots, M; j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

则模型式(13)的解为:

$$\hat{f} = g - A\hat{z} \quad (22)$$

综上所述, 本文 DTV-B 图像去噪算法如算法 1 所列:

算法 1 DTV-B 图像去噪算法

- 步骤 1 输入: 观测图像 g , 参数 $\lambda, \alpha, \theta, \tau$ 和最大迭代次数 MaxIter .
- 步骤 2 初始化: $k \leftarrow 0, z^0 \leftarrow \mathbf{0}$.
- 步骤 3 根据式(10)计算图像的偏导数;
- 步骤 4 根据式(20)和式(21)求解 z^{k+1} ;
- 步骤 5 若 $k < \text{MaxIter}$, 令 $k \leftarrow k + 1$, 算法转至步骤 3; 否则, 算法转至步骤 6;
- 步骤 6 输出: 去噪图像 $\hat{f} \leftarrow g - A\hat{z}$.

5 数值实验和分析

在本节中, 我们采用仿真实验测试 DTV-B 算法对方向纹理图像去噪的有效性. 本文的实验图像如图 3 所示, 在实验中将其加入均值为 0, 不同方差 σ^2 的服从高斯分布的加性噪声, 得到含噪图像. 分别使用各向同性 TV 方法^[2]、各向异性 TV 方法^[14]、DTV 方法^[11]及本文 DTV-B 方法对含噪图像进行去噪处理和比较, 其中各向同性和各向异性 TV 方法分别使用向后差分 and B 样条离散差分近似图像偏导数(分别称为 $\text{TV}^{[2]}$ 方法、 TV_B 方法与 $\text{ATV}^{[14]}$ 方法、 ATV_B 方法).

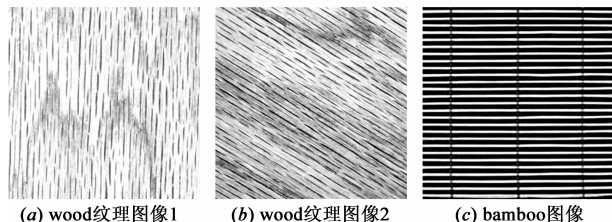


图3 实验图像

本文采用信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)作为衡量图像去噪效果的评价指标, SNR 定义为:

$$SNR = -10\log_{10}\left(\frac{\|f_{orig} - \hat{f}\|_F^2}{\|f_{orig}\|_F^2}\right) \quad (23)$$

其中, \hat{f} 表示去噪图像, f_{orig} 表示原始图像, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数.

实验采用的计算机硬件环境为 Intel Xeon CPU 2.67GHz、内存 4GB, 软件环境为 Microsoft Windows 7、MATLAB 7.10.

5.1 参数的选择

本节研究参数 $\{\lambda, \alpha, \theta\}$ 对 DTV_B 去噪算法性能的影响. 根据性质 2 知, 图像的方向全变差 $TVB_{\alpha, \theta}(f)$ 是以参数 $\{\alpha, \theta\}$ 为自变量的二元函数. 根据图 2 所示, 选择使 $TVB_{\alpha, \theta}(f)$ 取得最小值的方向参数 θ , 以确定图像中纹理的主方向. 图 4 显示了去噪后 wood 纹理图像 2 的 SNR 值与参数 $\{\alpha, \theta\}$ 之间的关系. 由图 4 可以看出, 如果选择较小的 α , 将会导致较差的去噪效果, 而选择较大的 α , 当图像纹理主方向 θ 的先验知识没有选择正确时, 则会导致较低的信噪比. 因此, 基于图像纹理主方向先验信息, 我们可权衡去噪的性能和稳定性来选择参数 $\{\alpha, \theta\}$ 的值. 对于确定的 $\{\alpha, \theta\}$, 我们选择正则化参数 λ 使得 $\|\hat{f} - g\|_{\lambda}^2 \approx \sigma^2$.

实验 1 对于 wood 纹理图像 1, 加入均值为 0, 标准差为 $\sigma = 25$ 的服从高斯分布的加性噪声, 得到信噪比为 20.0843dB 的含噪图像(如图 5(b)所示). 分别使用 ATV^[14]、ATV_B、DTV^[11] 及本文方法对图 5(b) 进行去噪处理和比较. 在 DTV 方法和本文方法中, 选择参数 $\alpha = 5$ 和 $\theta = \pi/2$, 使用 4 种方法得到的去噪图像如图 5 所

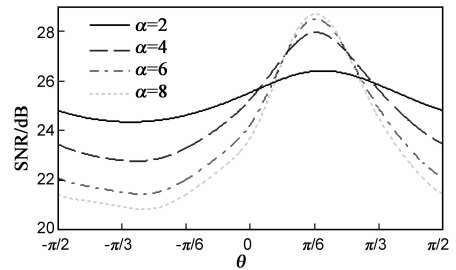


图 4 去噪后 wood 纹理图像 2 的 SNR 值与参数 $\{\alpha, \theta\}$ 之间的关系图

示. 表 1 中列出了不同信噪比 wood 纹理图像 1 对应于 4 种方法的去噪图像信噪比的比较.

表 1 不同信噪比 wood 纹理图像 1 的去噪图像 SNR(dB) 比较

去噪方法	ATV ^[14]	ATV_B	DTV ^[11]	本文方法
含噪图像 SNR				
20.0843	24.3931	24.7535	26.3931	27.4452
17.5296	22.4018	22.9629	24.0886	25.0565
16.0286	21.1832	21.4503	22.676	23.8826
14.9542	20.7807	21.0823	21.9555	22.7383

从图 5 中去噪图像和表 1 中信噪比的比较可以看出, ATV 方法和 ATV_B 方法可以有效地去除噪声, 但去噪图像存在明显的阶梯效应, 图像方向纹理丢失严重. DTV 方法能较好地抑制阶梯效应和保持图像方向纹理. 与其他 3 种方法相比, 本文方法得到的图像信噪比是最大的, 不仅能有效地抑制阶梯效应, 而且充分地保持了图像方向纹理和细节.

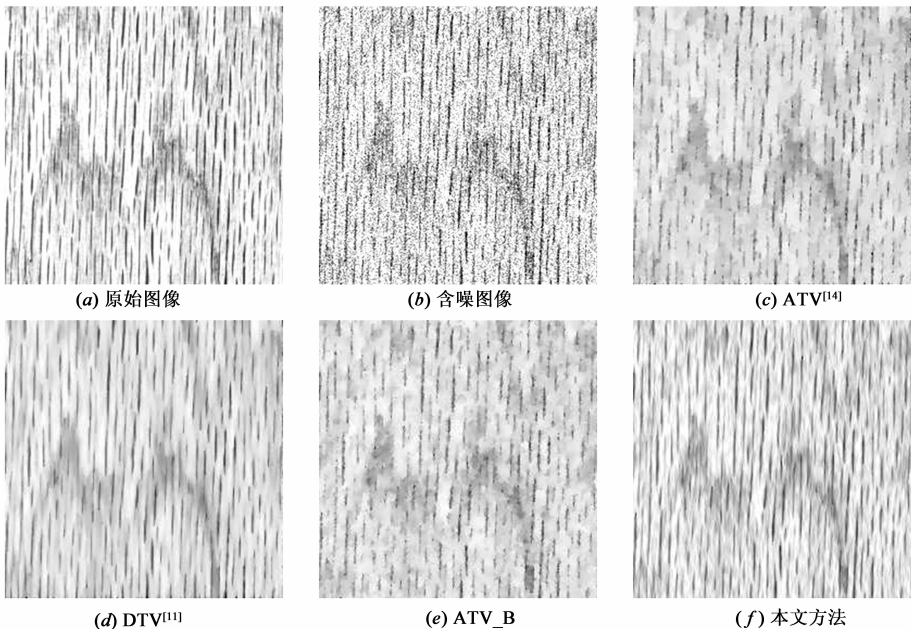


图 5 wood 纹理图像 1 的去噪图像比较

实验 2 对于 wood 纹理图像 2, 加入均值为 0, 标准差为 $\sigma = 20$ 的服从高斯分布的加性噪声, 得到信噪比为 19.2469dB 的含噪图像 (如图 6(b) 所示). 分别使用 TV^[2]、TV_B、DTV^[11] 及本文方法对图 6(b) 进行去噪处理和比较. 在 DTV 方法和本文方法中, 根据图 2 和图 4

所示, 选择参数 $\alpha = 5$ 和 $\theta = \pi/6$, 使用 4 种方法得到的去噪图像及其局部放大图如图 6 所示. 表 2 中列出了不同信噪比 wood 纹理图像 2 对应于 4 种方法的去噪图像信噪比的比较.

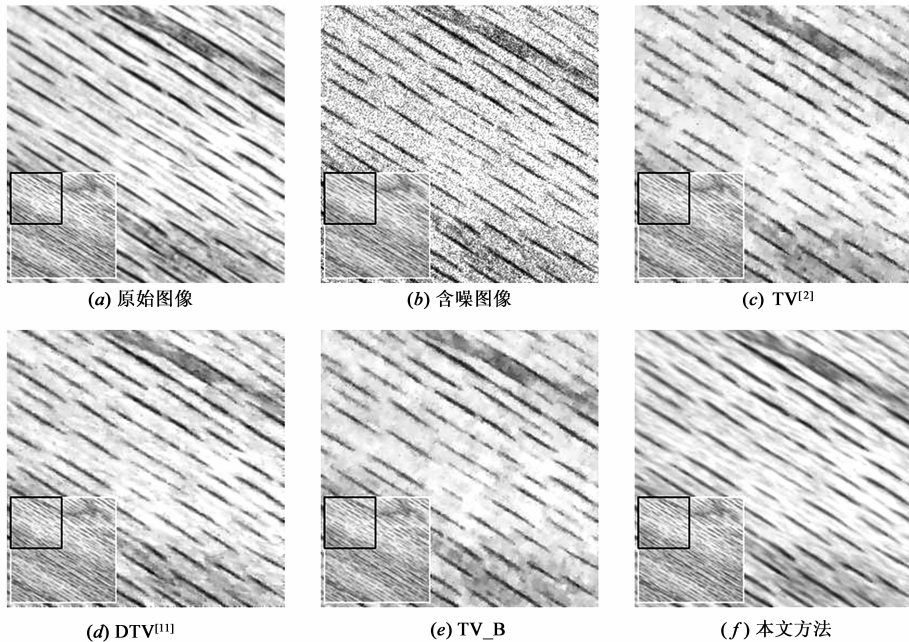


图 6 wood 纹理图像 2 的去噪图像及局部图比较

表 2 不同信噪比 wood 纹理图像 2 的去噪图像 SNR(dB) 比较

去噪方法	TV ^[2]	TV_B	DTV ^[11]	本文方法
含噪图像 SNR				
19.2469	24.8263	25.534	26.9659	28.2569
16.6283	23.1169	23.6942	25.0347	26.4952
15.1408	21.9801	22.5797	23.6917	25.1108
14.0827	20.9832	21.6631	22.5896	23.9891

从表 2 中信噪比的比较可以看出, 本文方法得到的图像信噪比是最大的, 可以有效地去除噪声. 同时, 从图 6 中去噪图像的局部放大图可以看出, TV 方法和 TV_B 方法可以有效地去除噪声, 但去噪图像方向纹理的保持效果不好. DTV 方法能较好地保持图像方向纹理, 与其他 3 种方法相比, 本文方法保持图像方向纹理的效果是最好的.

实验 3 对于 bamboo 图像, 加入均值为 0, 标准差为 $\sigma = 25$ 的服从高斯分布的加性噪声, 得到信噪比为 15.3845dB 的含噪图像 (如图 7(b) 所示). 分别使用 ATV^[14]、ATV_B、DTV^[11] 及本文方法对图 7(b) 进行去噪处理和比较. 在 DTV 方法和本文方法中, 选择参数 $\alpha =$

5 和 $\theta = 0$, 使用 4 种方法得到的去噪及残差图像如图 7 所示 (这里为更清楚地显示残差图像, 本文使用 $|\hat{f} - f| + 50$ 计算残差图像). 表 3 中列出了不同信噪比 bamboo 图像对应于 4 种方法的去噪图像信噪比的比较.

表 3 不同信噪比 bamboo 图像的去噪图像 SNR(dB) 比较

去噪方法	ATV ^[14]	ATV_B	DTV ^[11]	本文方法
含噪图像 SNR				
15.3845	16.9798	17.5421	19.1107	20.0663
12.3640	14.4425	14.9938	16.9089	17.8264
10.6263	13.0243	13.6061	15.6009	16.4348
9.3854	11.8262	12.6743	14.4557	15.4507

从表 3 中信噪比的比较可以看到, 本文方法得到的信噪比是最大的, 可以有效地去除噪声. 同时, 从图 7 中的去噪及残差图像比较可以明显看到, 与其他 3 种方法相比, DTV 方法虽然能取得较好的去噪效果, 但是 bamboo 图像中的垂直条带纹理丢失严重. 而本文方法不仅能有效地去除噪声, 同时也能较好地保持 bamboo 图像中的垂直条带纹理.

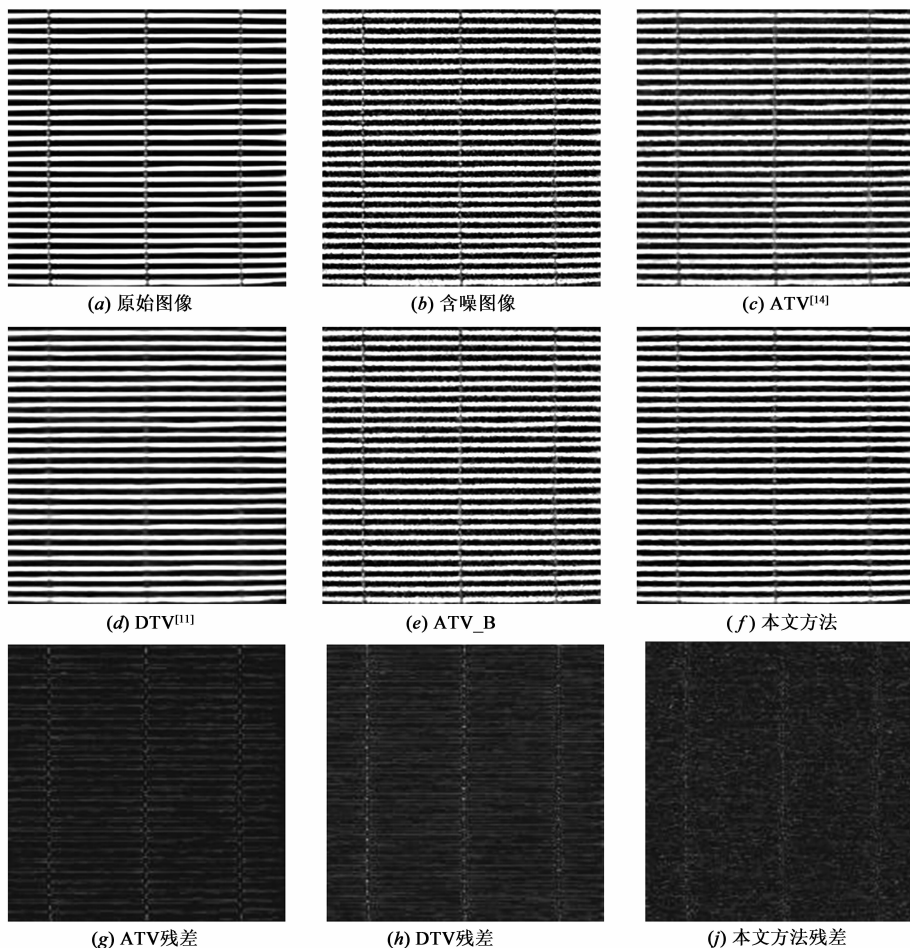


图7 bamboo图像的去噪图像及残差图像比较

6 结论

本文针对方向纹理图像去噪问题,分析了 DTV 正则化项的若干等价表示性质.基于 B 样条离散差分形式的旋转不变性近似图像的偏导数,代替了常用的向前差分或向后差分法.同时,基于等价表示性质迭代构造代理泛函,给出了图像方向纹理保持的 DTV 正则化去噪模型及其主优化算法.并讨论了参数 $\{\alpha, \theta\}$ 的选择,特别地,如果关于图像中纹理主方向 θ 的先验信息不可信,则需选择相对较小的 α .数值实验表明,与 TV 去噪算法和 DTV 去噪算法相比,本文方法能更好地保持图像方向纹理、抑制图像的阶梯效应,充分说明了本文方法针对方向纹理图像去噪问题的有效性.

参考文献

- [1] A Tikhonov, V Arsenin. Solutions of Ill-Posed Problems[M]. V H Winston, Washington, DC: Halsted Press, 1977. 7 - 9.
- [2] L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Phys D, 1992, 60(1 - 4): 259 - 268.
- [3] 卢成武, 宋国乡. 带曲波域约束的全变差正则化抑噪方法[J]. 电子学报, 2008, 36(4): 646 - 649.
- Lu Cheng-wu, Song Guo-xiang. Total variation regularization denoising method with constraint on curvelet-domain[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(4): 646 - 649. (in Chinese)
- [4] P L Combettes, J C Pesquet. Image restoration subject to a total variation constraint[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(9): 1213 - 1222.
- [5] J Bioucas-Dias, J Oliveira, M Figueiredo. Total variation-based image deconvolution: A majorization minimization approach [A]. Proc ICASSP[C]. Toulouse, France: IEEE, 2006. 861 - 864.
- [6] A Beck, M Teboulle. Fast gradient-based algorithms for constrained total variation image denoising and deblurring problems [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(11): 2419 - 2434.
- [7] 王静, 吕科, 何宁, 王茜. 基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊[J]. 电子学报, 2012, 40(8): 1503 - 1508.
- Wang Jing, Lv Ke, He Ning, Wang Qian. Total variation image deblurring based on split Bregman method[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(8): 1503 - 1508. (in Chinese)

- [8] T F Chan, J Shen. Mathematical models for local nontexture inpaintings[J]. SIAM J Appl Math, 2002, 62(3): 1019 – 1043.
- [9] A Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. J Math Imaging Vis, 2004, 20(1): 89 – 97.
- [10] Yue Hu, Mathews Jacob. Higher degree total variation (HDTV) regularization for image recovery[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(5): 2559 – 2571.
- [11] İlker Bayram, Mustafa E. Kamasak. Directional total variation [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(12): 781 – 784.
- [12] M Unser, T Blu. Wavelet theory demystified[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 470 – 483.
- [13] S Lefkimmiatis, A Bourquard, M Unser. Hessian-based norm regularization for image restoration with biomedical applications[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(3): 983 – 995.
- [14] S Esedoğlu, S. Osher. Decomposition of images by the anisotropic Rudin Osher Fatemi model [J]. Commun Pure Appl Math, 2004, 57(12): 1609 – 1626.

作者简介



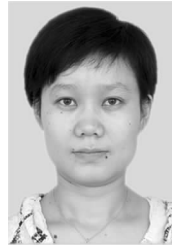
刘鹏飞 男, 1990 年出生于安徽安庆, 南京理工大学计算机系博士生, 研究方向为图像去噪, 图像恢复, 压缩感知.

E-mail: liupengfei199091@163.com



肖亮(通信作者) 男, 1976 年出生于湖南长沙, 南京理工大学计算机系教授, 博士生导师, 主要研究领域为图像处理反问题, 稀疏表示与压缩感知, 计算机视觉.

E-mail: xiaoliang@mail.njust.edu.cn



黄丽丽 女, 1977 年出生于广西德保, 博士, 讲师, 主要研究领域为图像建模与算法.

E-mail: huang-lili@163.com